



Mortalité: Détection statistique d'un risque de spécification

**Chaire BNP Paribas Cardif – ISFA
Séminaire technique – 8 avril 2013**

- 1. Contexte et problématique**
- 2. Principaux résultats**
- 3. Rappels sur les tests statistiques**
- 4. Modélisation des décès**
- 5. Description des tests**
- 6. Tests répétés, suivi technique**
- 7. Résultats numériques**
- 8. Conclusion et perspectives**

Contexte et problématique

- **Réglementation Solvabilité II**
- **Provisions techniques = Best-Estimate + Risk margin**
- **Mortalité, risque non couvrable**
- **Solvabilité 2, article 83:**

« Les entreprises d'assurance et de réassurance mettent en place des processus et procédures en vue d'assurer une comparaison régulière de leurs meilleures estimations et des hypothèses sous-tendant le calcul de ces dernières avec les données tirées de l'expérience. [...] »

- **Système de « reporting » périodique**
- **Table de mortalité : Outil « central » en assurance vie**

Contexte et problématique

- L'assureur dispose d'une loi de mortalité a priori : q_x
- Portefeuille non parfaitement mutualisé, erreur de prédiction :
 - Fluctuations d'échantillonnages ou Risque de spécification ?
- Comment suivre périodiquement le risque de mortalité et/ou de longévité ?
- Utilisation de tests statistiques séquentiels/périodiques bilatéraux (ou unilatéraux pour un risque particulier)
 - Risque de mortalité
 - Risque de longévité

Principaux résultats

- **2 procédures de tests: Tests dépendants et indépendants**
- **Notre approche nécessite:**
 - Un niveau de risque de première espèce fixé à priori « α »
 - Un nombre maximum de répétitions « n »
 - Taille minimum de portefeuille
- **Applications opérationnelles simples**
- **Multiples tests statistiques compatibles (Approche bilatérale ou unilatérale pour risque de mortalité et/ou longévité)**
 - Tests asymptotiques
 - Tests en distance finie

Rappels sur les tests statistiques

1. Hypothèses nulle H_0 vs Hypothèse alternative H_1
2. Utilisation d'une statistique dont les propriétés sont connues sous H_0
3. L'observation est-elle vraisemblable sous H_0 ?
4. Décision de conservation ou de rejet de l'hypothèse nulle vis-à-vis du niveau de « significativité » du test
5. Tests dépendants de la forme de l'hypothèse à tester : Composite, unilatérale, etc.

Rappels sur les tests statistiques

- **Hypothèse nulle / Hypothèse alternative**
- **Risque de première espèce / Risque de seconde espèce**

Décision / Réalité	Vraie	Fausse
Conserver l'hypothèse	Bonne décision	Erreur de seconde espèce
Rejeter l'hypothèse	Erreur de première espèce	Bonne décision

- **Probabilité d'erreur de première espèce fixée**
- **Probabilité d'erreur de seconde espèce inconnue**

Rappels sur les tests statistiques

- **Risque de première espèce, probabilité de faire un rejet lorsque l'hypothèse est vraie (α)**
 - Paramètre du test
- **Risque de seconde espèce, probabilité de conserver H_0 alors que H_1 est vraie (β)**
 - Complexe pour les hypothèses composites multidimensionnelles
- **Puissance d'un test ($1 - \beta$), probabilité de rejeter H_0 lorsqu'elle est fautive**
- **Le meilleur test est le plus puissant à un niveau de risque de première espèce fixé**

Rappels sur les tests statistiques

- On dispose d'une table de mortalité à priori : q_x
- Hypothèse nulle : « la table de mortalité est adaptée au portefeuille »
- Déclinaisons pratiques de l'hypothèse nulle possibles:
 - Les taux de mortalité sont-ils tous égaux ? L'écart doit-il mesuré pour chaque taux ou globalement ? Doit-on prendre en compte tous les âges de la même manière ?
 - Quel écart est acceptable pour l'espérance de vie résiduelle ?
 - Etc.
- Notre choix : Comparer tous les taux de mortalité
- Pas de résultat d'optimalité pour les hypothèses composites

Modélisation des décès

- **Modélisation statistique**
- **Durée de vie modélisée par une variable aléatoire positive : T**
- **Probabilité de décès à l'âge x :**

$$q_x = P(T \leq x + 1 | T > x)$$

- **Nombre de décès à chaque âge x (indépendants) :**

$$\forall x \in [x_1, x_p], D_x \sim \mathcal{B}(n_x, q_x)$$

- **Modèle statistique :**

$$\mathcal{M}_B = \left(\mathcal{Y} = \mathbb{N}^p, \mathcal{P}_Q = \otimes_{x=x_1}^{x_p} \mathcal{B}(n_x, q_x) \mid q \in Q \right)$$

Modélisation des décès

- **Les décès observés à chaque âge : $d = (d_{x_1}, \dots, d_{x_p})$**
- **Estimation des taux de mortalité, taux bruts : $\hat{q}_x = \frac{d_x}{n_x}$**
- **Les taux bruts sont des variables aléatoires dont la loi est asymptotiquement gaussienne :**

$$\forall x \in [x_1, x_p], \sqrt{n_x} \frac{\hat{q}_x - q_x}{\sqrt{q_x(1 - q_x)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

- **Tests de Wald, Score et Ratio de vraisemblance**
 - Basés sur le concept de vraisemblance
 - Découlent de propriétés vérifiées asymptotiquement (applicable pour de gros portefeuilles)
 - Tests convergents (la puissance tend vers 1)
 - Asymptotiquement équivalents
- **Tests du SMR en distance finie**
 - Applicables sur de petits échantillons
- **Tests du SMR asymptotiques**

- **Test de Wald**
- **Comparaison directe des taux bruts et de la table**
 - Distance quadratique pondérée par l'information de Fisher estimée
 - La distance doit-être proche de 0
 - Convergence du taux de rejet relativement lente
- **La statistique associée est asymptotiquement distribuée selon une loi du Chi-deux**

$$\begin{aligned}\xi^W &= (\hat{q} - q^\gamma)^t \mathcal{I}(\hat{q}) (\hat{q} - q^\gamma) \\ &= \sum_{x=x_1}^{x_p} \frac{n_x (\hat{q}_x - q_x^\gamma)^2}{\hat{q}_x (1 - \hat{q}_x)}.\end{aligned}$$

- **Test du Score**
- **Comparaison du Score obtenu et 0**
 - Le score est le gradient de la log-vraisemblance
 - Le score est une fonction des observations
 - Une valeur nulle annonce un extrema (ici le maximum)
 - Convergence plus rapide que le test de Wald
- **La statistique associée est asymptotiquement distribuée selon une loi du Chi-deux**

$$\begin{aligned}\xi^S &= \frac{\partial \ln \mathcal{L}(D, q^\gamma)^t}{\partial q} \mathcal{I}^{-1}(q^\gamma) \frac{\partial \ln \mathcal{L}(D, q^\gamma)}{\partial q} \\ &= \sum_{x=x_1}^{x_p} \frac{n_x (\hat{q}_x - q_x^\gamma)^2}{q_x^\gamma (1 - q_x^\gamma)}.\end{aligned}$$

- **Test du Ratio des vraisemblances**
- **Comparaison des log-vraisemblances**
 - Le ratio doit-être proche de 1
 - Non défini s'il n'y a aucun décès
- **La statistique associée est asymptotiquement distribuée selon une loi du Chi-deux**

$$\begin{aligned}\xi^R &= 2(\ln \mathcal{L}(\hat{q}) - \ln \mathcal{L}(\hat{q}^\gamma)) \\ &= \sum_{x=x_1}^{x_p} D_x \ln \left(\frac{\hat{q}}{q^\gamma} \right) + (n_x - D_x) \ln \left(\frac{1 - \hat{q}}{1 - q^\gamma} \right)\end{aligned}$$

Description des tests

- Test du *Standardized Mortality Ratio* (SMR)
- Le Standardized Mortality Ratio est le ratio du nombre de décès observé sur le nombre de décès attendu
- Sous l'hypothèse nulle, ce ratio ne doit pas être trop éloigné de 1
- Plusieurs tests possibles :
 - Distance finie (test du paramètre de la loi sous-jacente)
 - Asymptotiques (Utilisation du CLT de Lindeberg)

Tests répétés, suivi technique

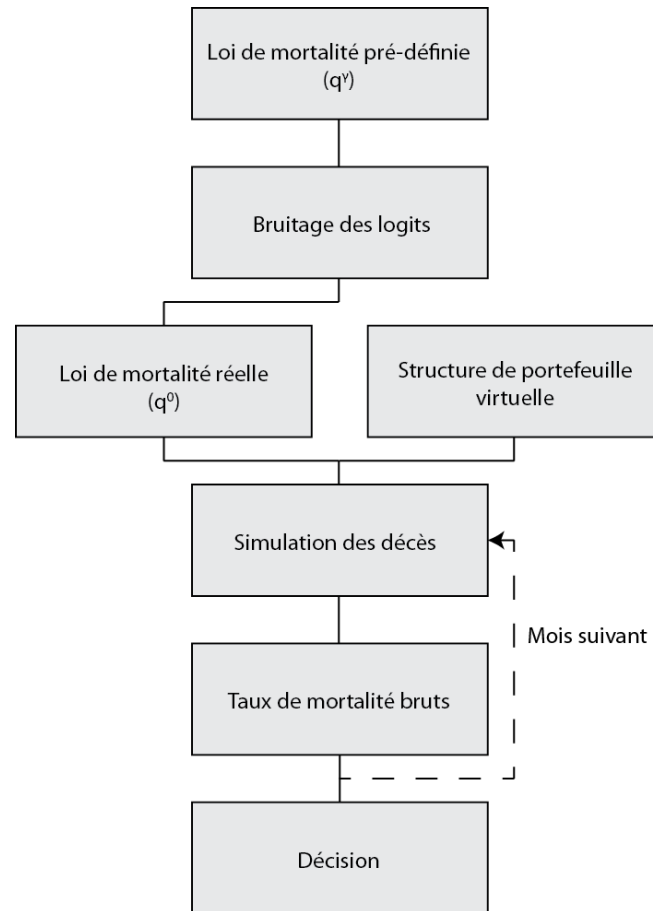
- **Un test, une opportunité d'erreur de première espèce**
 - Plusieurs tests, plusieurs opportunités
- **Nécessité de prendre en compte le nombre de tests dans le choix du niveau de significativité**
 - Méthode de Sidak (hypothèses indépendantes uniquement)
 - Méthode de Bonferoni (Conservatrice, adapté aux hypothèses dépendantes)
- **Adapter les hypothèses, taux de mortalité mensualisés, etc.**

Tests répétés, suivi technique

- **Processus des tests indépendants : Tester chaque mois la table sur la base des décès du mois**
 - Indépendance des statistiques de test
 - Probabilité d'erreur de première espèce connue
- **Processus des tests dépendants : Tester chaque mois la table face aux décès cumulés depuis le début**
 - Dépendance des statistiques de test
 - Probabilité d'erreur de première espèce majorée
 - A priori, plus puissant que les tests indépendants

Résultats numériques

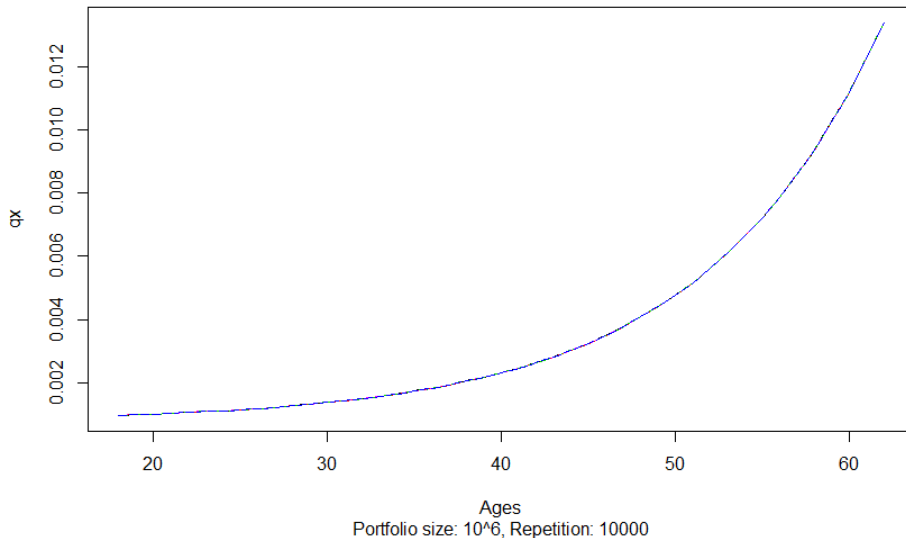
- Procédure de test numérique, 10 000 répétitions



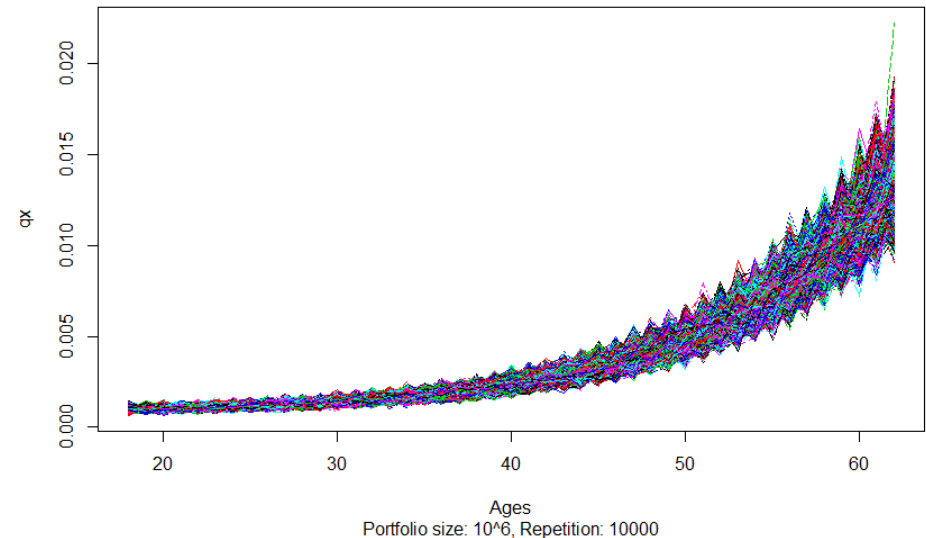
Résultats numériques

- Risque de spécification généré par un bruit blanc gaussien ajouté aux logits des taux de mortalité

Mortality rates with no specification risk



Mortality rates with specification risk (10%)



$$\forall x \in [x_1, x_p], q_x^0 = \frac{e^{\epsilon_x} q_x^\gamma}{1 + q_x^\gamma (e^{\epsilon_x} - 1)} - E \left(\frac{e^{\epsilon_x} q_x^\gamma}{1 + q_x^\gamma (e^{\epsilon_x} - 1)} - q^\gamma \right)$$

Résultats numériques

Tests indépendants vs Tests dépendants mensuels

- Pas de bruit
- Mensuel pendant 3 ans
- Nombre d'assurés: 1 000 000

α_G	10%	5%	1%	0.5%
CLT Binomial	9.52	4.57	1.03	0.39
CLT Poisson	9.52	4.57	0.85	0.39
SMR	8.66	4.06	0.79	0.34
Wald	100	100	100	100
Score	20.52	12.28	3.97	2.49
Ratio

Tableau 1: Tests indépendants

α_G	10%	5%	1%	0.5%
CLT Binomial	2.67	1.43	0.42	0.24
CLT Poisson	2.67	1.43	0.41	0.24
SMR	2.63	1.40	0.37	0.23
Score	4.01	2.39	0.66	0.42

Tableau 2: Tests dépendants

- Tests de Wald et du Score non applicable pour les tests indépendants.
- Test du ratio inadapté à un suivi mensuel

Résultats numériques

- Tests indépendants vs Tests dépendants mensuels

- Pas de bruit

- Mensuel pendant 3 ans

- Nombre d'assurés: 10 000

	α_G	10%	5%	1%	0.5%
CLT Binomial	17.12	17.12	5.79	5.79	
CLT Poisson	17.12	17.12	5.79	5.79	
SMR	1.72	1.72	0.38	0.08	
Wald	100	100	100	100	
Score	99.89	99.83	99.30	98.88	
Ratio	

Tableau 3: Tests indépendants

- Tests indépendants non adaptés, trop peu d'individus

- Tests dépendants plus robuste, sauf le test du Score

	α_G	10%	5%	1%	0.5%
CLT Binomial	3.07	2.00	0.49	0.37	
CLT Poisson	3.07	2.00	0.49	0.37	
SMR	1.76	0.90	0.24	0.09	
Score	32.09	28.56	22.10	19.77	

Tableau 4: Tests dépendants

Résultats numériques

- Equivalence entre niveau de bruit et indicateurs de mortalité
- Pour un individu de 65 ans:

σ	e	δ
0%	16.21	0.00000
5%	16.34	0.00708
10%	16.48	0.01556
20%	16.75	0.03051
30%	17.00	0.04770
40%	17.23	0.06508

Tableau 5: Correspondance bruit, indicateurs de mortalité

$$e_{65} = \frac{1}{S(65)} \sum_{j=66}^{120} S(j)$$

$$\delta = \frac{q_{95\%}(e_{65}) - E(e_{65})}{E(e_{65})}$$

Résultats numériques

- **Tests indépendants vs Tests dépendants mensuels**

- Bruit, $\sigma=10\%$

- Mensuel pendant 3 ans

- Nombre d'assurés: 1 000 000

α_G	10%	5%	1%	0.5%
CLT Binomial	31.12	18.45	5.02	3.08
CLT Poisson	31.12	18.45	5.02	3.08
SMR	34.02	21.06	6.90	4.05
Score	29.03	18.56	6.65	4.11

Tableau 6: Tests indépendants

α_G	10%	5%	1%	0.5%
CLT Binomial	72.07	68.45	60.16	57.37
CLT Poisson	72.07	68.45	60.13	57.31
SMR	72.58	68.95	60.99	57.95
Score	99.95	99.95	99.79	99.66

Tableau 7: Tests dépendants

- Tests dépendants significativement plus puissants

Résultats numériques

- Tests indépendants vs Tests dépendants mensuels

- Bruit, $\sigma=20\%$

- Mensuel pendant 3 ans

- Nombre d'assurés: 1 000 000

	α_G	10%	5%	1%	0.5%
CLT Binomial		64.50	52.77	30.17	23.52
CLT Poisson		64.50	52.77	30.10	23.52
SMR		66.95	55.45	35.20	27.80
Score		84.63	73.80	48.28	38.75

Tableau 8: Tests indépendants

	α_G	10%	5%	1%	0.5%
CLT Binomial		88.30	87.03	83.93	82.72
CLT Poisson		88.30	87.02	83.93	82.71
SMR		88.51	87.28	84.25	82.90
Score		100	100	100	100

Tableau 9: Tests dépendants

- Le Score est le test le plus puissant, rejet quasi-certain

Conclusions et perspectives

- **Processus de suivi du risque de mortalité facilement applicable**
- **Contrôle du risque de première espèce avancé pour les tests dépendants (False Discovery Rate, Holm, etc.)**
- **Recherche de tests séquentiels**
- **Etude du temps moyen de détection d'une erreur**

Quelques références

- **Croix, J-C., Planchet, F. et Thérond, P. (2013), Mortality: a statistical approach to detect model misspecification, Working paper**
- **Gourieroux, C. et Monfort, A. (1996). Statistiques et Modèles économétriques, Economica**
- **Planchet, F. et Therond, P. (2011). Modélisation statistique des phénomènes de durée: Applications actuarielles, Economica**
- **Sigmund, D. (1985). Sequential analysis: Tests and confidence Intervals. Springer series in Statistics**

Conclusions et perspectives

Merci de votre attention, avez-vous des questions ?